Printed Pages – 7

I-174

B.Sc. (Part-I) Examination, 2020

MATHEMATICS

Paper - I

(Algebra and Trigonometry)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Pass Marks : 17

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं दो भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : All questions are compulsory. Answer any two parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई–I / UNIT-I

Q. 1. (a) यदि A तथा B सममित (विषम-सममित) आव्यूह है, तब दर्शाइए कि A + B सममित (विषम-सममित) है। **5**

If A and B are symmetric (skew symmetric), show that A + B is symmetric (skew symmetric).

(b) निम्नलिखित आव्यूह को पंक्ति-समानीत ऐशेलान रूप में समानयन कीजिये और इसकी जाति एवं शून्यता ज्ञात कीजिए : **5**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Reduce the following matrix to the row-reduced echelon form and determine its rank and nullity :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

(c) सिद्ध कीजिये कि वर्गसम आव्यूह के आइगेन मान (अभिलाक्षणिक मूल) शून्य या इकाई होते है। **5**

Prove that the eigen values of idempotent matrix are zero or one.

इकाई–II / UNIT-II

Q. 2. (a) क्या समीकरणों का निम्नलिखित निकाय : **5**

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0$$

$$7x_1 + 10x_2 + 12x_3 = 0$$

एक उभयनिष्ठ (common) शून्येतर हल रखता है ?

Does the following system of equations :

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0$$

$$7x_1 + 10x_2 + 12x_3 = 0$$

possess a common non-zero solution ?

(b) समीकरण $x^4 + 8x^3 + x - 5 = 0$ का ऐसे समीकरण में रूपान्तरण कीजिए जिसमें द्वितीय पद न हो। **5**

Transform the equation $x^4 + 8x^3 + x - 5 = 0$ into an equation lacking the second terms.

(c) कार्डन विधि (Cardon's method) द्वारा निम्नलिखित त्रिघात समीकरण को हल कीजिये : **5**

$$9x^3 + 6x^2 - 1 = 0$$

Solve by Cardon's method the following cubic equation :

$$9x^3 + 6x^2 - 1 = 0$$

इकाई–III / UNIT-III

Q. 3. (a) सिद्ध कीजिये कि इकाई के चार चतुर्थ मूलों (fourth roots) का समुच्चय {1, –1, i, –i} गुणन संक्रिया के अन्तर्गत एक परिमित आबेली समूह है। **5**

Show that the set of fourth roots of unity (namely {1, –1, i, –i}) forms an finite abelian group with respect to multiplication.

(b) सिद्ध कीजिये कि किसी उपसमूह के दो दक्षिण (वाम) सहसमुच्चय या तो विसंघीय (असंयुक्त) या सर्वसम (सर्वांगसम) होते हैं। **5**

Prove that any two right (left) cosets of a subgroup are either disjoint or identical.

(c) यदि H समूह G का एक उपसमूह है तथा N, G का एक प्रसामान्य उपसमूह है, तो दर्शाइये कि $H \cap N$, H का एक प्रसामान्य उपसमूह है। **5**

If H is a subgroup of group G and N is a normal subgroup of G, then show that $H \cap N$ is a normal subgroup of H.

इकाई–IV / UNIT-IV

Q. 4. (a) दर्शाइए कि पूर्णांकों का योगात्मक समूह : **5**

$G = \{....., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

योगात्मक समूह $G^* = \{....., -3m, -2m, -m, 0, m, 2m, 3m, ...\}$

से तुल्यकारी है, जहाँ $m \neq 0$ कोई स्थिर पूर्णांक है।

Show that the additive group of integers :

$G = \{....., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

is isomorphic to the additive group

$G^* = \{....., -3m, -2m, -m, 0, m, 2m, 3m, ...\}$

where $m \neq 0$ is any constant integer.

(b) वलय R के एक अरिक्त उपसमुच्चय S को R का एक उपवलय होने के लिये आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबंध यह है कि : **5**

(i) $S + (-S) = S$

(ii) $SS \subseteq S$

The necessary and sufficient conditions for a non-empty subset S of a ring R to be a subring of R are :

(i) $S + (-S) = S$

(ii) $SS \subseteq S$

(c) सिद्ध कीजिये कि शून्य भाजक रहित एक परिमित क्रम-विनिमेय वलय एक क्षेत्र होता है। **5**

Prove that a finite non-zero, commutative ring without zero divisors is a field.

इकाई–V / UNIT-V

Q. 5. (a) $\sin 7\theta$ को $\sin \theta$ और $\cos \theta$ की घातों में प्रसार कीजिये। **5**

Expand $\sin 7\theta$ in powers of $\sin \theta$ and $\cos \theta$.

(b) सिद्ध कीजिये कि : **5**

$$\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{as}{bc}\right)}+\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{bs}{ca}\right)}+\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{cs}{ab}\right)}=\pi,$$

जहाँ a + b + c = s

Prove that :

$$\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{as}{bc}\right)}+\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{bs}{ca}\right)}+\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{cs}{ab}\right)}=\pi,$$

where a + b + c = s

(c) निम्नलिखित श्रेणी का योगफल ज्ञात कीजिये : **5**

$$\sin\theta\cos\theta+\frac{\sin 2\theta\cos^2\theta}{2!}+\frac{\sin 3\theta\cos^3\theta}{3!}+.....\infty$$

Find the sum of the following series :

$$\sin\theta\cos\theta+\frac{\sin 2\theta\cos^2\theta}{2!}+\frac{\sin 3\theta\cos^3\theta}{3!}+.....\infty$$